

# 高鲁棒性两阶段激光雷达-惯性测量单元 外参在线标定算法

林鑫<sup>1</sup> 张捷<sup>1</sup> 冯景怡<sup>2</sup> 孟杰<sup>3</sup> 王书亭<sup>3</sup>

1. 华中科技大学能源与动力工程学院, 武汉, 430074

2. 驭势科技有限公司基础平台研发部, 北京, 102400

3. 华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉, 430074

**摘要:**针对车辆在近似平面上运动时,退化的传感器数据难以标定外参的问题,提出了一种高鲁棒性两阶段激光雷达-惯性测量单元(LiDAR-IMU)外参在线标定算法。标定算法包括别除外点的解析解初值计算和非线性滑窗在线迭代优化两个阶段。第一阶段别除预数据集中的外点,以滑动窗口的形式多次求解只包含旋转分量的手眼标定模型,并改进解析解筛选的条件,求解出多解加权旋转外参的SVD解析解。第二阶段最小化包含外参的残差函数,以旋转解析解为初值滑动窗口迭代优化六自由度外参,使外参快速收敛,并在退化运动和错误历史约束过大时固定外参,避免外参退化。与原始算法对比,该算法对退化的传感器数据具有鲁棒性,可在无外参初值的情况下实现精准鲁棒地在线标定外参。

**关键词:**激光雷达-惯性测量单元;外参标定;外点剔除;退化运动;固定外参

中图分类号:TN958.98

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2022.24.009

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Highly Robust Two-stage LiDAR-IMU External Parameter Online Calibration Algorithm

LIN Xin<sup>1</sup> ZHANG Jie<sup>1</sup> FENG Jingyi<sup>2</sup> MENG Jie<sup>3</sup> WANG Shuting<sup>3</sup>

1. School of Energy and Power Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

2. Basic Platform Research and Development, UISEE Technology Co., Ltd., Beijing, 102400

3. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

**Abstract:** Aiming at the problems that the degraded sensor data were difficult to calibrate external parameters when the vehicles were moving in an approximate plane, a highly robust two-stage LiDAR-IMU external parameters online calibration algorithm was proposed. The calibration algorithm included two stages: initial value calculation and online iterative optimization using nonlinear sliding window. In the first stage, the outliers in the pre-data set were eliminated, the hand-eye calibration model that contained only the rotation components was solved multiple times in the form of a sliding window, meanwhile, the conditions of the analytical solution screening were improved, the singular value decomposition(SVD) analytical solution of multiple weighted rotation external parameters was solved. The second stage minimized the residual function containing the external parameters, and used the rotational analytical solution as the initial value sliding window to iteratively optimize the six-degree-of-freedom external parameters, so that the external parameters converged quickly. In order to avoid the degradation of external parameters, when the degenerate motion and error history constraints were too large, the external parameters would be fixed. Compared with the original algorithm, the algorithm is robust to degraded sensor data, which may achieve accurate and robust online calibration of external parameters without the initial values of the external parameters.

**Key words:** laser detection and ranging-inertial measurement unit(LiDAR-IMU); external parameter calibration; outlier elimination; degraded motion judgment; fixed external parameter

DAR)和惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)是即时定位与建图(simultaneous localization and mapping, SLAM)技术中常见的传感器配置,也是自动驾驶传感器的主流组合。LiDAR测距范围大,精度可达厘米级,但在雨雪等恶劣环境下测量可靠性差,不适用于旷阔的环境;IMU通常分为加速度计和陀螺仪,可以提供载体的加速度和角加速度,它不依赖于环境场景,但在长时间下存在累积误差。LiDAR与IMU在自动驾驶任务中可以优势互补,因此,基于LiDAR和IMU融合的定位算法<sup>[1-3]</sup>成为近年来的研究热点。LiDAR的定位结果基于LiDAR坐标系,而LiDAR定位过程需要校正点云的运动畸变,因此需要从IMU获得高频运动信息。对于所有的融合算法来说,为了提高最终输出定位结果的精度,均需要尽可能准确地标定传感器之间的坐标系转换关系。几何变换的估计过程称为外参标定,即估计不同传感器坐标系之间相对六自由度(即旋转和平移)变换。人工测量传感器之间的相对平移和旋转是不准确的,有时也是难以实现的。手眼标定<sup>[4-5]</sup>是一个众所周知的传感器校准方法,本文将手眼标定的传感器模型应用到自动驾驶车辆的LiDAR与IMU传感器组合上, LiDAR通常安装在汽车顶部附近,IMU通常安装在汽车后桥的垂直中心线前面。

手眼标定是一种重要的标定方法<sup>[6-8]</sup>,广泛应用于具有自我运动估计能力的传感器的标定。HORAUD等<sup>[8]</sup>将手眼标定经典公式 $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$ 应用到相机和LiDAR等更广泛的传感器配置中,并开发了一个通用的数学框架来解决手眼标定问题。为了标定LiDAR与IMU之间的外参,GENTIL等<sup>[9]</sup>提出了一种LiDAR-IMU传感器系统外参标定的概率框架,基于IMU数据插值的预积分,可以消除三维点云的运动失真,并根据点云的点到面距离对平面进行环境拟合,构建优化方程。吴昱晗等<sup>[10]</sup>通过将点云转化为全局坐标系,在逐帧聚类后匹配点云中心,并优化残差函数来估计最优的六自由度外参,但由于同一类型目标点云的观测范围不同,聚类结果在帧与帧之间存在差异,故无法对该方法的准确性进行定量评价。杨超等<sup>[11]</sup>提出基于非线性优化的里程计与LiDAR外参的在线标定算法,根据优化方式求取较为精确的激光雷达位姿信息。彭梦等<sup>[12]</sup>针对2D LiDAR和摄像机最小解标定方法多解问题,在最小解标定过程中提出改进措施以提高真解命中率和标定精度。JIAO等<sup>[13]</sup>通过对齐每个

万方数据

传感器的估计运动来进行自动初始化的手眼校准,然后通过最小化由特征点到平面构成的残差函数,使用基于外观的方法对所得参数进行二次优化。为了关联IMU和LiDAR的测量数据与外参,需要在数据层面将它们联系起来。受视觉惯性工作<sup>[14]</sup>的启发, YE等<sup>[2]</sup>设计了紧耦合LiDAR-IMU融合的方法,使用原始IMU数据和LiDAR测量来优化整个系统的状态,其中包括可获得初始外参的系统初始化和持续滑动窗口优化外参,但是该工作没有考虑到如何解决退化运动时的系统初始化。对于包含大量近似平面运动的无人驾驶汽车,IMU很难在六个自由度上都获得足够的激励,这就导致了无人驾驶汽车中LiDAR-IMU外参标定困难。

为了解决无人驾驶汽车中传感器噪声和退化运动导致LiDAR-IMU外参标定失败的问题,本文提出了一种高鲁棒性两阶段LiDAR-IMU外参在线标定算法。第一阶段是旋转外参解析解初值计算,通过剔除外点来去除退化的传感器数据,先对预数据集筛选出具有一定的旋转增量激励,并且IMU里程计旋转增量和LiDAR里程计旋转增量中满足角度差小于阈值的、离散的里程计对来构建只包含旋转分量的手眼标定方程组,同时对整个数据集以滑动窗口的形式,对手眼标定方程组多次求解解析解,最后以奇异值分解(SVD)中的第三大与第四大奇异值的比值来进行多解加权。第二阶段是非线性滑窗在线迭代优化,最小化包含外参的残差函数,以旋转解析解为初值滑动窗口迭代优化六自由度外参,使外参快速收敛,并在退化运动和错误历史约束过大时固定外参,避免外参退化。本文标定算法对不完美和退化的传感器数据具有鲁棒性,在无初值情况下也能在线标定外参。

## 1 基本原理

### 1.1 手眼标定模型

手眼标定的问题可以用相对或绝对几何位姿变换来解决。相对变换法利用了同一参照系在不同时刻的几何位姿差异,这需要通过几次里程计运动来获取足够的数据进行标定。手眼标定公式用来描述不同位置关联到同一坐标系的变换。在本文的坐标系定义中, $(\cdot)^w$ 为世界坐标系, $(\cdot)^c$ 为车辆坐标系,其原点位于车后轴中心, $(\cdot)^b$ 为IMU坐标系, $(\cdot)^l$ 为LiDAR坐标系。LiDAR坐标系与车辆坐标系的位姿变换矩阵 $\mathbf{T}_c^l$ 已知。定义LiDAR里程计的 $k$ 到 $k+1$ 时刻的位姿变换为

$T_{l_{k+1}}^l$ , IMU 里程计的  $k$  到  $k+1$  时刻的位姿变换为  $T_{l_{k+1}}^{b_k}$ ,  $T_{l_k}^{b_k}$  和  $T_{l_{k+1}}^{b_{k+1}}$  表示  $k$  和  $k+1$  时刻 LiDAR 与 IMU 的外参变换矩阵, 对应手眼标定方程的形式为  $T_{l_{k+1}}^{b_k} T_{l_{k+1}}^{b_{k+1}} = T_{l_k}^{b_k} T_{l_{k+1}}^l$ , 如图 1 所示。

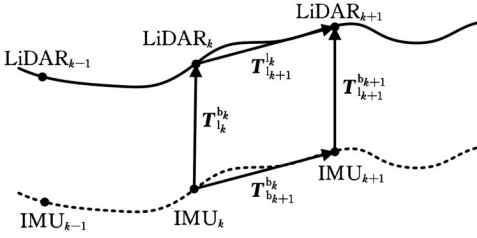


图 1 不同位置下里程计增量关系

Fig.1 Incremental relationship of odometer in different positions

由于 LiDAR 和 IMU 传感器作为刚体固连在车辆上, 它们的相对位置不随时间变化, 即  $T_{l_k}^{b_k} = T_{l_{k+1}}^{b_{k+1}}$ , 因此, 原手眼标定方程等效于  $T_{l_{k+1}}^{b_k} T_1^b = T_1^b T_{l_{k+1}}^l$ ,  $T_1^b$  为 IMU 坐标系指向 LiDAR 坐标系的位姿变换矩阵, 即 LiDAR 与 IMU 之间的外参。除了标定目标外参  $T_1^b$  之外,  $T_{l_{k+1}}^{b_k}$  和  $T_{l_{k+1}}^{b_{k+1}}$  可以从传感器里程计的位姿信息中得到, 对整个位姿序列建立多个约束方程, 将求解问题转化为下式描述的优化问题:

$$T_1^b = \min \frac{f(T_1^b)}{T_1^b} \quad (1)$$

$$f(T_1^b) = |T_{l_{k+1}}^{b_k} T_1^b - T_1^b T_{l_{k+1}}^l|$$

进一步, 将外参位姿变换矩阵划分为旋转部分  $R_1^b$  和平移部分  $t_1^b$ :

$$T_1^b = \begin{bmatrix} R_1^b & t_1^b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, 平移部分为  $t_1^b = [t_x \ t_y \ t_z]^T$ , 旋转部分  $R_1^b$  可以表示为

$$R_1^b = \begin{bmatrix} c\gamma ca + s\gamma s\beta sa & s\gamma s\beta sa - c\gamma sa & -s\gamma c\beta \\ c\theta sa & c\beta ca & s\beta \\ s\gamma ca - c\gamma s\beta sa & -c\gamma s\beta sa - s\gamma sa & c\gamma c\beta \end{bmatrix}$$

式中,  $\alpha$  为偏航角(yaw);  $\beta$  为俯仰角(pitch);  $\gamma$  为横摇角(roll);  $c$  表示  $\cos$ ;  $s$  表示  $\sin$ 。

通过计算平移部分和旋转部分 6 个参数, 可以得到 IMU 坐标系与 LiDAR 坐标系的六自由度变换关系。

在本文的外参标定算法中, 只考虑对应的 IMU 里程计增量和 LiDAR 里程计增量的旋转部分。在系统还未初始化时, 通常会忽略 IMU 的偏差, 这个偏差包括加速度计的偏差和陀螺仪的偏差。IMU 作为一个包含旋转状态和平移状态的估计器, 其旋转量是陀螺仪数据的一阶积分, 而平移量是加速度计数据的二阶积分, 因此, 在加速度

计的偏差和陀螺仪的偏差都没有获得修正时, 二阶积分求得的平移量远远大于一阶积分所得的旋转量。同时, 依据传感器特性, 陀螺仪偏差相对于加速度计偏差更为稳定, 累积误差也更小, 因此, 对于 IMU 而言, 旋转量相对于平移量的累积误差更小。

本文首先选择状态量误差较小的陀螺仪数据的一阶积分旋转量, 用于求解只考虑旋转分量的手眼标定模型  $R_{l_{k+1}}^{b_k} R_{l_{k+1}}^{b_{k+1}} = R_{l_k}^{b_k} R_{l_{k+1}}^l$ , 如图 2 所示。

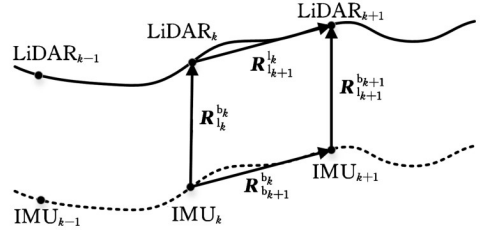


图 2 只考虑旋转分量的手眼标定模型示意图

Fig.2 Schematic diagram of hand-eye calibration model that only considers the rotation component

通过 LiDAR 里程计的 3D 点云帧间匹配可获取相邻两帧之间 LiDAR 的相对旋转  $R_{l_{k+1}}^{b_k}$ , 通过 IMU 预积分操作也可获取相邻两帧之间车体坐标系(即 IMU 坐标系)的相对旋转  $R_{l_{k+1}}^{b_{k+1}}$ , 设 IMU 与 LiDAR 之间的相对旋转为  $R_1^b$ , 则对于任意时刻  $k$ , 以下等式成立:

$$R_{l_{k+1}}^{b_k} R_1^b = R_{l_k}^{b_k} R_{l_{k+1}}^l \quad (3)$$

将式(3)用四元数表示为

$$q_{l_{k+1}}^{b_k} \otimes q_1^b = q_{l_k}^{b_k} \otimes q_{l_{k+1}}^l \quad (4)$$

其中,  $\otimes$  表示两个四元数之间的乘法运算。由式(4)可得

$$(\mathcal{Q}_l(q_{l_{k+1}}^{b_k}) - \mathcal{Q}_r(q_{l_{k+1}}^l))q_1^b = \mathcal{Q}_{l_{k+1}}^k q_1^b = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中,  $\mathcal{Q}_{l_{k+1}}^k$  为  $\mathcal{Q}_l$ 、 $\mathcal{Q}_r$  两个矩阵相减的结果,  $\mathcal{Q}_l(q)$  和  $\mathcal{Q}_r(q)$  分别为四元数的左乘和右乘形式, 表示为

$$\mathcal{Q}_l(q) = \begin{bmatrix} q_w \mathbf{I} + [\mathbf{q}_v]_{\times} & \mathbf{q}_v \\ -\mathbf{q}_v^T & q_w \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathcal{Q}_r(q) = \begin{bmatrix} q_w \mathbf{I} - [\mathbf{q}_v]_{\times} & \mathbf{q}_v \\ -\mathbf{q}_v^T & q_w \end{bmatrix}$$

其中,  $q_w$  为四元数实部, 四元数  $q$  和其虚部  $q_v$  分别表示为

$$q = [q_x \ q_y \ q_z \ q_w]^T \quad (7)$$

$$q_v = [q_x \ q_y \ q_z]^T$$

$[\mathbf{q}_v]_{\times}$  为虚部向量的反对称矩阵:

$$[\mathbf{q}_v]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

对于  $N$  对相对旋转的测量值, 可获得超定的线性方程:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(0)} \mathbf{Q}_1^{(0)} \\ \omega_2^{(1)} \mathbf{Q}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \omega_N^{(N-1)} \mathbf{Q}_N^{(N-1)} \end{bmatrix} \mathbf{q}_1^b = \mathbf{Q}_N \mathbf{q}_1^b = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\omega_{k+1}^{(k)} = \begin{cases} 1 & r_{k+1}^{(k)} < 5 \\ \frac{5}{r_{k+1}^{(k)}} & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

$$r_{k+1}^{(k)} = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_1^{b-1} (\mathbf{R}_{b_{k+1}}^b)^{-1} \mathbf{R}_1^b \mathbf{R}_{b_{k+1}}^b) - 1}{2}\right) \quad (11)$$

式中,  $N$  为激光雷达帧的帧数, 由滑动窗口大小决定;  $\omega_N^{(N-1)}$  为外点剔除权重, 它与两个里程计相对旋转的角度差有关;  $r_{k+1}^{(k)}$  为两个里程计相对旋转的角度差。

通过对矩阵  $\mathbf{Q}_N$  进行奇异值分解来求解超定方程  $\mathbf{Q}_N \mathbf{q}_1^b = \mathbf{0}$  的最小二乘解:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_N &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (12) \\ \mathbf{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4] \end{aligned}$$

其中, 对角矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  中的  $\sigma_i$  称为矩阵  $\mathbf{Q}_N$  的奇异值, 奇异值满足  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4$  的条件, 最小奇异值  $\sigma_4$  对应的右奇异向量  $\mathbf{v}_4$  为旋转外参  $\mathbf{q}_1^b$  最终结果, 此时的最小二乘解  $\mathbf{q}_1^b$  对应的误差尺度是最小奇异值  $\sigma_4$ 。

### 1.2 含外参的非线性滑窗迭代优化

在即时定位与建图过程中, 随着关键帧和路标点的增多, 后端优化的计算效率会不断下降, 为了避免这种情况, 使用滑动窗口算法将待优化的关键帧的数量限制在一定范围内, 以控制后端优化的规模, 固定一些历史轨迹, 仅对当前时刻附近的一些轨迹进行优化, 如图 3 所示。

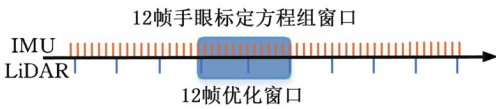


图 3 滑动窗口优化算法

Fig.3 Sliding window optimization algorithm

当新的测量约束出现时, 滑动窗口将包含新的状态, 并在窗口中忽略最老的状态。通过最小化以马氏范数表示的代价函数:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \{ \|r_p(\mathbf{x})\|^2 + \sum \|r_1(m, \mathbf{x})\|^2 + \sum \|r_b(z, \mathbf{x})\|^2 \} \quad (13)$$

得到状态  $\mathbf{x}$  的最大后验估计。其中,  $r_p(\mathbf{x})$  表示边缘化先验残差,  $r_1(m, \mathbf{x})$  表示相对 LiDAR 扫描的点到线面约束的残差,  $r_b(z, \mathbf{x})$  表示 IMU 预积分约束的残差。滑动窗口内所有的状态量定万方数据

义为  $\mathbf{x}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= [\mathbf{x}_p \quad \cdots \quad \mathbf{x}_j \quad \mathbf{x}_1^b] \quad 0 < p < j < N \\ \mathbf{x}_k &= [\mathbf{p}_{b_k}^w \quad \mathbf{v}_{b_k}^w \quad \mathbf{q}_{b_k}^w \quad \mathbf{b}_a \quad \mathbf{b}_g] \quad k \in [0, N] \\ \mathbf{x}_1^b &= [\mathbf{t}_1^b \quad \mathbf{q}_1^b] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中,  $p, j$  为滑动窗口中间某一雷达帧的位置;  $\mathbf{x}_k$  为第  $k$  帧雷达帧的 IMU 状态, 它包含了 IMU 在世界坐标系中的位置  $\mathbf{p}_{b_k}^w$ 、速度  $\mathbf{v}_{b_k}^w$  和方向  $\mathbf{q}_{b_k}^w$ , 以及 IMU 的加速度计偏差  $\mathbf{b}_a$  和陀螺仪偏差  $\mathbf{b}_g$ ;  $\mathbf{x}_1^b$  为 LiDAR 与 IMU 之间的六自由度外参, 包含平移量  $\mathbf{t}_1^b$  和旋转量  $\mathbf{q}_1^b$ 。

将表示旋转的单位四元数  $\mathbf{q}_1^b$  通过

$$\mathbf{R}_1^b = \begin{bmatrix} 1 - 2q_y^2 - 2q_z^2 & 2q_y q_z - 2q_x q_w & 2q_y q_w + 2q_x q_z \\ 2q_y q_z + 2q_x q_w & 1 - 2q_y^2 - 2q_z^2 & 2q_z q_w - 2q_x q_y \\ 2q_y q_w - 2q_x q_z & 2q_z q_w + 2q_x q_y & 1 - 2q_y^2 - 2q_z^2 \end{bmatrix}$$

转换为旋转矩阵  $\mathbf{R}_1^b$ , 再将平移和旋转写在一个外参变换矩阵  $\mathbf{T}_1^b$  里, 有

$$\mathbf{T}_1^b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^b & \mathbf{t}_1^b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

代价函数(式(13))为非线性最小二乘形式, 采用高斯-牛顿算法求解。

## 2 改进算法

### 2.1 算法框架

高鲁棒性两阶段 LiDAR-IMU 外参在线标定算法框架如图 4 所示。两阶段是指旋转外参解析初值计算阶段和非线性滑窗在线迭代优化阶段。第一阶段是旋转外参解析初值计算: 通过剔除外点来去除退化的传感器数据, 先对整个预数据集筛选出具有一定的旋转增量且 IMU 和 LiDAR 里程计旋转增量角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  小于阈值的、离散的里程计对, 来构建手眼标定方程组, 然后以滑动窗口的形式对整个数据集每满 10 帧就对手眼标定方程组求解一次解析解, 并在 IMU 里程计累积误差可能导致系统崩溃时, 将初始化系统进行重启, 消除累积误差对角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  筛选的影响。最后以奇异值分解中的第三大与第四大奇异值的比值作为每一个窗口的旋转外参解析解的筛选条件和权重。第二阶段是非线性滑窗迭代: 最小化包含外参的残差函数, 将第一阶段的旋转外参解析解作为后续非线性滑窗迭代优化的初值, 同时为了限制外参的迭代优化在一些退化运动时造成系统状态量漂移, 本文在出现这种情况时固定外参, 避免第一阶段获得的外参退化, 陷入优化过程中的局部极小值。



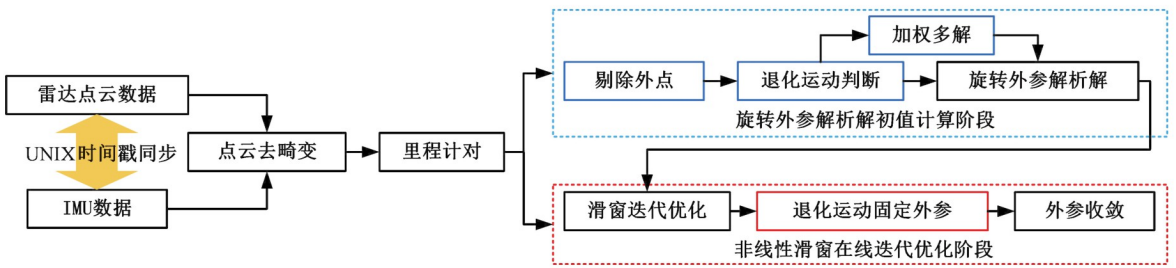


图 4 两阶段 LiDAR-IMU 外参标定流程框架

Fig.4 Two-stage LiDAR-IMU external parameter calibration process framework

## 2.2 旋转外参解析解初值计算改进

### 2.2.1 剔除外点的手眼标定模型

对应手眼标定方程  $AX = XB$  的形式,在本文方法中, $X$  对应的是 IMU 和 LiDAR 之间的旋转外参  $q_1^b$ 。考虑到传感器的测量误差与噪声,IMU 里程计增量  $q_{b_{k+1}}^b$  和 LiDAR 里程计增量  $q_{l_{k+1}}^l$  的角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  不为零,如图 5 所示。

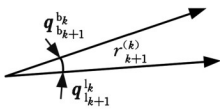


图 5 两个里程计增量夹角

Fig.5 Incremental angle between two odometers

因此,在构建手眼标定方程组时,本文算法先对 IMU 里程计增量和 LiDAR 里程计增量的旋转部分求夹角,只选择那些角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  小于阈值的里程计增量对来构建手眼标定方程组,以剔除外点。还需要注意的是,这样对数据集的筛选操作后,原来连续的、固定窗口大小的手眼标定方程组滑动窗口被改进为离散的、不定大小的手眼标定方程组滑动窗口,如图 6 所示。

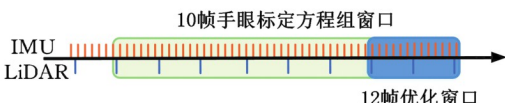


图 6 旋转外参解析解初值计算改进框架图

Fig.6 Improved frame diagram of initial value calculation of analytic solution of rotating external parameters

另外,在只考虑旋转部分手眼标定模型中,观察旋转部分约束方程发现,当传感器的运动接近直线运动时,旋转部分的矩阵  $R$  趋近于单位矩阵,当  $R$  恰好等于单位矩阵时,旋转部分的约束方程退化,即有

$$IR_1^b = R_1^b I \quad (16)$$

因此,当运动近似于直线时,任意  $R$  都能满足约束条件,这不利于最终标定结果的求解。因此,本文在从 LiDAR-IMU 的运动序列中建立约束方程时,筛选出具有一定的旋转增量且 IMU 里程计旋转增量  $q_{b_{k+1}}^b$  和 LiDAR 里程计旋转增量  $q_{l_{k+1}}^l$  角度

差  $r_{k+1}^{(k)}$  小于阈值的里程计增量对,来剔除手眼标定模型中的外点。

### 2.2.2 手眼标定模型求解的判断条件改进

在只考虑旋转部分的手眼标定模型中,还要注意求解的终止条件。在包含旋转足够多的运动序列中,可以很好地估计出相对旋转矩阵  $R_1^b$ ,这时  $Q_N$  对应一个准确解,其零空间的秩为 1,但是在外参标定过程中,某些轴向上可能存在退化运动(如匀速运动),这时  $Q_N$  的零空间秩会大于 1。判断条件就是  $Q_N$  的第二小的奇异值  $\sigma_3$  是否大于某个阈值,若大于则其零空间的秩为 1,标定成功;反之秩大于 1,多余的秩主要由噪声决定,相对旋转矩阵  $R_1^b$  的精度不够,标定失败。原始算法中选择  $\sigma_3 > 0.25$  为手眼标定模型求解的判断条件,但是从矩阵奇异值分解(SVD)后的奇异值所代表的物理含义和求解超定方程  $Q_N q_1^b = 0$  的最小二乘解的角度来看,  $\sigma_3 > 0.25$  表示矩阵  $Q_N$  在第三列维度上的运动激励尺度大于 0.25,通过实验发现,有可能存在  $\sigma_3 \geq \sigma_4 > 0.25$  的情况,此时  $Q_N$  的四个奇异值大小通常为  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 > 0.25$ ,这种情况下奇异值  $\sigma_4$  对应的右奇异向量  $v_4$  并不是最佳的最小二乘解。因此,为了获得奇异值  $\sigma_4$  对应的右奇异向量  $v_4$  的最佳的最小二乘解,同时根据奇异值激励在第三个和第四个维度上的运动激励尺度的差异程度来筛选退化运动,本文改进算法中判断条件为奇异值  $\sigma_3 \gg \sigma_4$  是否成立。若不成立,则该最小二乘解不是最优解,这意味着求解旋转外参是失败的,则要增加不含退化运动的旋转观测来提供更多的约束。在具体的算法实现中,手眼标定模型求解的判断条件奇异值  $\sigma_3 \gg \sigma_4$  可量化为

$$\sigma_3 / \sigma_4 > threshold \quad (17)$$

与原始算法中单纯以第三大奇异值  $\sigma_3 > 0.25$  的绝对阈值相比,考虑到最佳最小二乘解的求解条件,奇异值  $\sigma_3 / \sigma_4$  比值的相对阈值  $threshold$  对包含退化运动的数据更具鲁棒性,更能反映手眼方程组内的运动状态。

### 2.3 非线性滑窗在线迭代优化改进

#### 2.3.1 两阶段 LiDAR-IMU 外参标定算法框架图

旋转外参解析解初值计算阶段的改进中会选择一些具有一定的旋转增量且角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  小于阈值、离散的里程计增量对来构建手眼标定方程组, 这样减少了大窗口的条件限制, 可在缩短求解时间的情况下, 获得更加准确的旋转外参解析解。但是当数据集几乎是退化运动时, 或者筛选阈值较为严格时, 绝大多数里程计增量夹角差都不满足选择阈值, 这样就导致旋转外参解析解初值计算阶段收集不到 10 帧窗口大小的里程计增量对, 从而无法进行系统初始化。同时, 系统长时间没有初始化, IMU 预积分量的偏差无法被修正, 随着手眼标定方程组窗口长时间的滑动, 未初始化系统的 IMU 里程计的累积误差越来越大, 导致 IMU 里程计增量累积误差越来越大, 满足夹角小的里程计增量对的数量越来越少, 手眼标定模型的外点越来越多, 与 LiDAR 里程计增量匹配成功率降低, 陷入恶性循环中。因此, 本文算法会在 IMU 里程计累积误差将要导致前端匹配系统崩溃时(1000 帧) 重置系统, 清空里程计累积误差, 但会保留之前所有已经求解的旋转外参解析解。本文设计的高鲁棒性两阶段有限加权 LiDAR-IMU 外参在线标定算法如图 7 所示。

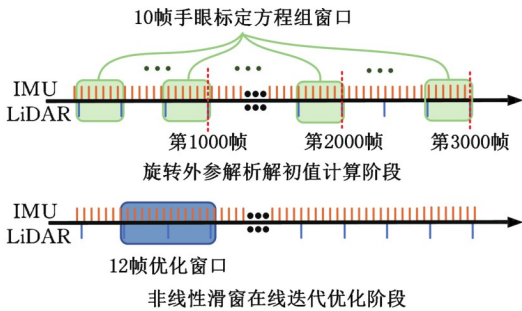


图 7 两阶段 LiDAR-IMU 外参标定算法框架图

Fig.7 Two-stage LiDAR-IMU external parameter calibration algorithm framework diagram

与原始算法的工作有显著不同的是, 该两阶段有限加权的框架在求解手眼方程组的旋转外参解析解时, 初值计算阶段是对整个预数据集收集具有一定的旋转增量且 IMU 里程计旋转增量  $q_{b_{k+1}}^{b_k}$  和 LiDAR 里程计旋转增量  $q_{l_{k+1}}^{l_k}$  夹角差  $r_{k+1}^{(k)}$  小于阈值的里程计增量对, 同时这些增量对也是离散的。通过对整个预数据集进行扫描, 第一阶段可以基于预数据集给出精确的旋转外参解析解, 避免原始算法中固定的、连续的手眼方程组窗口内出现退化运动的偶然性问题。

#### 2.3.2 退化运动时的固定外参策略

非线性滑窗在线迭代优化阶段也会遇到一些万方数据

较为平缓的运动序列, 为此, 本文设置了在遇到退化运动(如静止或者匀速运动) 时触发固定外参的策略, 即

$$\mathbf{x} = \begin{cases} [x_p \ \cdots \ x_j \ x_1^b] & \text{普通} \\ [x_p \ \cdots \ x_j] & \text{fix}(x_1^b) \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $\text{fix}(x_1^b)$  表示在退化运动时固定外参, 只优化 IMU 状态量, 避免旋转外参初值在迭代优化过程中飘逸过大, 防止其陷入局部极小值。固定外参策略的触发条件有两个, 第一个条件是非线性滑窗窗口内的平移量的平均变化量  $p_{\text{mean}}$  小于一定阈值时, 其中

$$p_{\text{mean}} = \sum_{k=0}^N p_{b_k}^w \quad (19)$$

式中,  $p_{b_k}^w$  为窗口内第  $k$  帧的车体位移量。

当  $p_{\text{mean}}$  小于一定的阈值时, 说明此时的运动状态是静止的或者匀速的, 属于退化运动, 这时外参的某些状态量处于不可观情况。为了避免第一阶段获得的精确的解析解初值在迭代优化过程中被带偏, 陷入局部极小值, 需要进行固定外参的操作。第二个条件是在系统刚初始化成功时, 初始的点云地图还未收敛, 点云的匹配效果较差, 出现较多的误匹配, 导致优化中含有错误的历史残差, 在这时迭代优化外参, 将导致解析解初值偏离, 而这部分历史残差应当先由窗口内的 IMU 状态来进行调整, 直到系统较为稳定时再开始启动微调外参。具体方案为判断  $r_{\text{cost}}$  的值:

$$r_{\text{cost}} = r_p(\mathbf{X}) / (r_l(m, \mathbf{X}) + r_b(z, \mathbf{X})) \quad (20)$$

若  $r_{\text{cost}}$  大于阈值, 说明错误的历史约束比较大, 则固定外参。进一步地, 若  $r_{\text{cost}}$  远大于阈值, 说明错误的历史约束过大了, 则固定外参的同时重置历史约束残差。

## 3 实验分析

### 3.1 实验设计

#### 3.1.1 实验平台与传感器数据预处理

如图 8 所示, 该实验车辆含有一个 Velodyne VLP-16 型号的激光雷达与一个 Xsens MTi-100 型号的 IMU。在车辆视图中, 激光雷达坐标系是  $l$  系统,  $l$  系统原点位于激光雷达结构的中心, 它的  $X$  轴指向车辆前进方向, 其  $Y$  轴垂直于  $X$  轴指向车辆前进方向的左边,  $Z$  轴垂直于  $X$ 、 $Y$  轴向上。IMU 载体坐标系的定义是  $b$  系统,  $b$  系统原点位于 IMU 的中心, 它的  $X$  轴也是指向车辆前进方向, 其  $Y$  轴指向车辆前进方向的左边,  $Z$  轴垂直于  $X$ 、 $Y$  轴向上。为方便观察和比较, 在后续的实验结果分析时, 将使用 yaw、pitch 和 roll 来分析



LiDAR-IMU 之间的旋转,并将之前所有可用的外参的平均值作为后续标定实验的目标值。

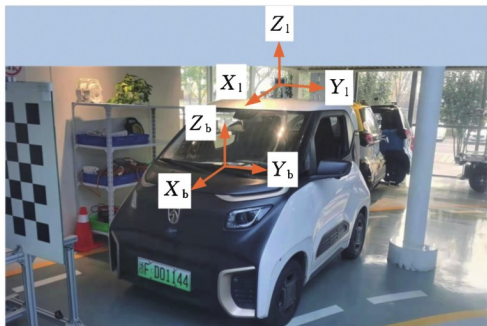


图 8 车载实验平台

Fig.8 Vehicle experiment platform

在获取 LiDAR 和 IMU 两个传感器的数据信息后,首先做的是数据同步。LiDAR 点云频率为 10 Hz,即获取的位置信息更新频率为 10 Hz,而 IMU 点云频率数据为 200 Hz,两者均采用 UNIX 时间戳机制,记录结果自 1970 年 1 月 1 日(UTC 时间)开始。因为不能保证找到具有相同时间戳的数据,因此通过时间插值来实现同步对齐。同步对齐后,可以得到同一时间序列的两个传感器的位姿信息。

### 3.1.2 可观性分析与运动要求

对于 IMU 传感器来说,各状态量耦合程度较高,直观上难以确定各状态量是否能够得到有效估计,通过可观性分析<sup>[15]</sup>可有效掌握系统对各状态量的估计情况,同时有助于提出相应的改进方案。为了获得可靠的平移校准,需要至少两轴旋转以及随机平移。单轴旋转将导致平移校准沿旋转轴变得不可观。可靠的空问校准的最小运动要求是至少一个全局轴平移和双轴旋转,为了最大限度地使标定过程中 LiDAR-IMU 外参的各个量可观,车辆需要有 X、Y 轴上的旋转运动,即包含 roll 和 pitch 分量上的运动激励,因此,采集的预数据集会包含“∞”环的运动序列,并含有上下斜坡的运动序列,使其包含 Z 轴方向的运动激励,最后预数据集还需要超过 3 min 的驾驶时间,以确保在旋转外参解析解初值计算阶段有满足本文算法筛选的可用 IMU 数据进行校准,尽量避免 IMU 数据完全退化,确保 LiDAR-IMU 外参参数的六自由度可观性。

## 3.2 旋转外参解析解初值计算改进对比实验

### 3.2.1 改进后的手眼标定方程组窗口大小

在旋转外参解析解初值计算阶段的改进算法中,通过求夹角  $r_{k+1}^{(k)}$  来剔除外点,只选择那些具有一定的旋转增量、角度差  $r_{k+1}^{(k)}$  较小的里程计增量对来构建手眼标定方程组。由于手眼标定方程组

的构成经过了筛选,因此不需要根据原来的滑动窗口大小(12 帧)来求解旋转外参解析解。为了适配经过剔除外点的滑动窗口大小,设计了以下实验来确定新的手眼标定方程组窗口大小:考虑到原始算法设置了 7、12 帧这两种窗口大小配置,因此本文在其数值附近设置 4、7、10、12、16、20 帧共 6 组的窗口大小配置,从而在其中寻找出最佳手眼标定方程组窗口大小。保持其他标定参数相同,只改变手眼标定方程组窗口大小,对同一数据集进行测试,实验结果如表 1 所示。

表 1 不同手眼标定方程组窗口大小下外参标定误差

Tab.1 Calibration error of external parameters under different window sizes of hand-eye calibration equations

滑动大小	误差(°)			误差均值(°)
	yaw	pitch	roll	
4	0.847	1.963	3.401	2.070
7	1.673	1.103	1.064	1.280
10	1.190	0.625	0.510	<b>0.775</b>
12	3.916	0.655	0.675	1.749
16	7.200	1.438	0.489	3.042
20	15.295	1.288	4.528	7.037

该实验的评价指标为不同手眼标定方程组窗口大小获得旋转外参 yaw、pitch 和 roll 的标定结果与目标值的误差均值,与目标值的偏差越小,该窗口大小越好。从 6 组不同窗口设置的标定结果中可以看出,以 10 帧的滑动窗口大小来求解手眼标定方程组的旋转外参最小二乘解的误差均值最小,最小为 0.775°,对应 yaw、pitch 和 roll 三个角的误差为(1.190°,0.625°,0.510°)。该实验的结论为:在以上 6 组的窗口大小配置中,手眼标定方程组最佳窗口大小设置为 10 帧,在满足旋转外参解析解标定结果精确度的前提下,还能实现以小规模(10 帧大小)的手眼标定方程组来减小求解复杂度,加快求解速度。

另外,为了对比剔除外点算法和原始算法构建的手眼标定方程旋转外参解析解多解误差分布情况,将它们的旋转外参 yaw、pitch 和 roll 多解误差绘制成图 9 所示的箱线图,从图中可以看出,剔除外点算法的旋转外参解析解的 yaw、pitch 和 roll 三个角的误差外点数量要远少于原始算法,同时误差均值也更接近零,说明剔除外点算法的旋转外参解析解稳定性和精确度更高,对退化传感器数据的鲁棒性更高。

### 3.2.2 旋转外参解析解多解加权方式

由于第一阶段改进为以滑动窗口的形式,以 10 帧的窗口大小多次求解旋转外参解析解,并以

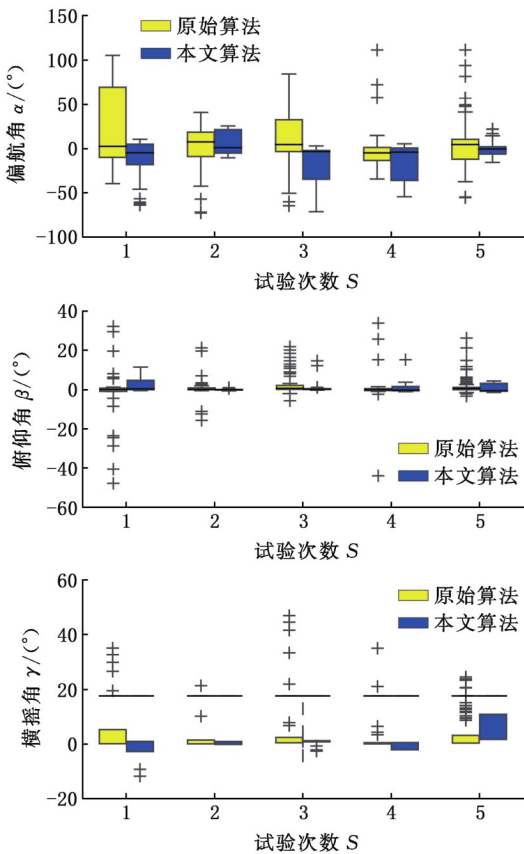


图9 剔除外点算法与原始算法误差分布对比  
Fig.9 Comparison of error distribution between the algorithm for eliminating exceptions and the original algorithm

奇异值分解的奇异值矩阵中的第三大与第四大奇异值  $\sigma_3/\sigma_4$  的比值作为阈值进行筛选解析解来判断运动激励,因此为了基于数据集的最大化成功率计算旋转外参解析解,本文以奇异值  $\sigma_3/\sigma_4$  的比值来加权每次求解的旋转外参解析解结果。为了将第一阶段中窗口滑动过程中的所有手眼标定方程组求解的解析解都利用起来,以达到基于预数据集的最大成功率获得最佳的旋转外参解析解初值的目的,下面通过实验来确定最佳的加权方式。

以奇异值  $\sigma_3/\sigma_4$  的比值大于 2.5 作为筛选阈值,采用 8 种不同的加权方法,分别对 4 组不同运动序列的数据集进行 32 组实验,来探索 8 种不同的加权方法中,手眼标定方程组旋转外参解析解多解的最佳加权方式,实验结果如表 2 所示。

该实验的评价指标为以不同手眼标定方程组旋转外参解析解的加权方式获得旋转外参 yaw、pitch 和 roll 结果与目标值的误差均值,误差均值越小,说明该加权方式越好。由表 2 可得,由加权方式 D 的误差均值最小,最小为 2.578°,对应 yaw、pitch 和 roll 三个角的误差为 (5.669°, 0.799°, 1.265°),因此,解析解多解的最佳加权方

式为 D,即筛选多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2.5$  的解,并以奇异值  $\sigma_3/\sigma_4$  作为各个解的权重加权求和,误差均值最小。

表 2 不同加权方式下的外参标定误差  
Tab.2 Calibration error of external parameters under different weighting methods

加权方式	误差(°)			误差均值(°)
	yaw	pitch	roll	
A	6.855	1.078	1.752	3.228
B	5.846	0.838	1.142	2.609
C	6.711	0.852	1.110	2.891
D	5.669	0.799	1.265	<b>2.578</b>
E	6.568	0.829	1.167	2.855
F	9.842	1.146	2.179	4.389
G	5.687	0.832	1.537	2.685
H	6.225	0.808	1.386	2.806

注:A表示取多解中  $\sigma_3/\sigma_4$  降序排序中前 10 个解的平均值;B表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2.5$  的解的平均值;C表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2$  的解的平均值;D表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2.5$  的解,并以  $\sigma_3/\sigma_4$  作为各个解的权重,加权求和;E表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2$  的解,并以  $\sigma_3/\sigma_4$  作为各个解的权重,加权求和;F表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 1$  的解(即所有解),并以  $\sigma_3/\sigma_4$  作为各个解的权重,加权求和;G表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2.5$  的解,并以  $\sigma_3/\sigma_4 - 2.5$  作为各个解的权重,加权求和;H表示取多解中满足  $\sigma_3/\sigma_4 > 2$  的解,并以  $\sigma_3/\sigma_4 - 2$  作为各个解的权重,加权求和。

### 3.3 非线性滑窗迭代优化改进对比实验

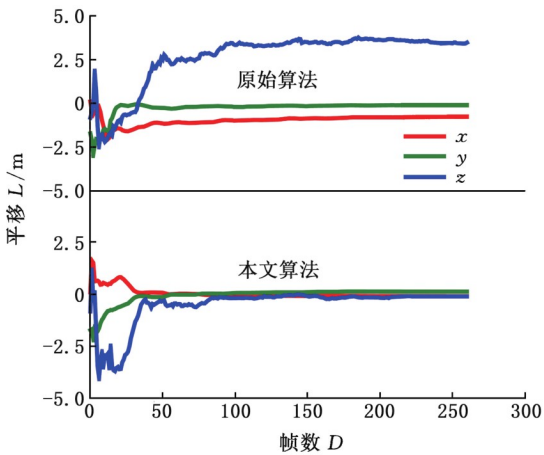
为了避免迭代优化中一些退化运动造成系统状态量偏离,本文在出现退化运动时选择固定外参,不进行外参优化,最大化利用求解手眼方程组的解析解第一阶段提供的良好的初始值,以避免陷入优化的局部极小值。因此,在实验场地中含有直道和弯道的地方进行在线标定实验,与原始算法对比,以验证固定外参策略的有效性。

如图 10 所示,通过非线性优化中外参迭代优化过程的对比,观察旋转外参 yaw、pitch 和 roll 的变化可以得出:本文带有固定外参策略的改进算法的旋转和平移外参量在迭代到 40 帧左右便收敛至零误差附近,而原始算法在迭代到 200 帧以后才逐渐收敛,且 Z 方向上的平移和 yaw 方向的旋转误差较大。因此,两阶段 LiDAR-IMU 外参在线标定算法收敛速度快于原始算法收敛速度,可有效避免外参在非线性迭代优化中陷入局部最小值。

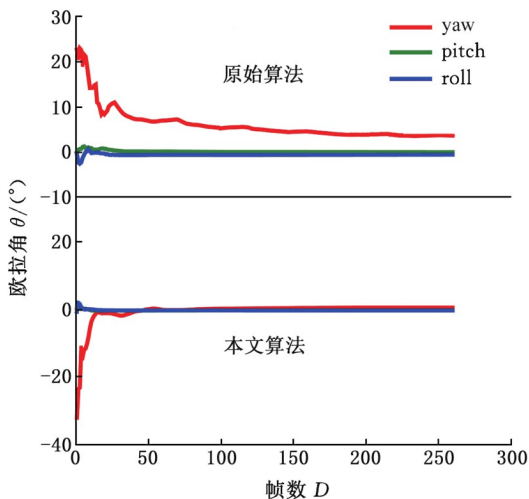
### 3.4 3D 点云重建可视化综合验证

在第二阶段的紧耦合 SLAM 过程中,除了在线标定 LiDAR-IMU 之间的外参,该阶段也会进行点云地图的构建。为了直观地比较本文改进算法的外参标定成功率和精度,与原始算法进行同一数据集的建图效果可视化对比,分别在地点 A、B 中进行实验,3D 点云重建结果如图 11 所示。





(a) 平移外参数



(b) 欧拉角旋转外参数

图 10 固定外参算法与原始算法外参变化对比  
Fig.10 Comparison of external parameter changes between the fixed external parameter algorithm and the original algorithm

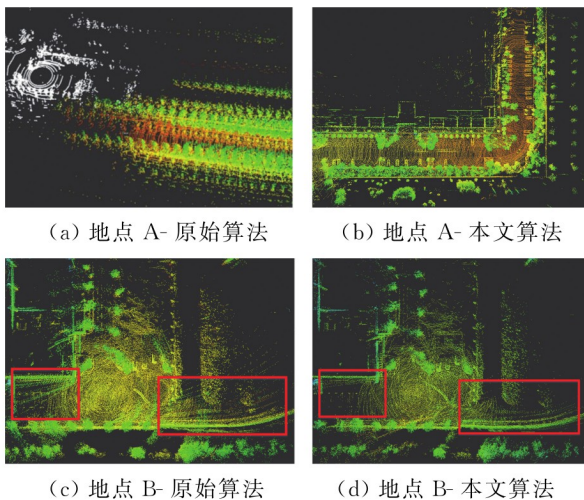


图 11 3D 点云重建可视化对比

Fig.11 3D point cloud reconstruction visualization comparison

在地点 A 的即时定位与建图过程中,原始算法标定结果的误差太大,外参陷入局部极小值,无

法在迭代中恢复,构建的点云地图漂移,标定失败。而本文算法标定结果的误差小,外参迭代收敛至真值附近,构建的点云地图紧凑规整,标定成功。在地点 B 的即时定位与建图过程中两个算法都标定成功,但是原始算法点云地图的左下部和右下部红色框内含有重影,未完全收敛,而本文算法重建的点云地图在这两处都收敛,地图质量优于原始算法地图质量。因此,在本文所测试的数据集中,两阶段 LiDAR-IMU 外参在线标定算法对退化的传感器数据具有鲁棒性,能够有效提高外参标定成功率,在即时定位与建图过程中,本文算法在标定后的 3D 点云建图成功率和精度均优于原始算法。

#### 4 结论

为了解决无人驾驶中传感器噪声和退化运动导致 LiDAR-IMU 外参标定失败的问题,本文提出了一种高鲁棒性两阶段 LiDAR-IMU 外参在线标定框架,第一阶段是旋转外参解析初值计算,第二阶段是非线性滑窗在线迭代优化。与原始框架相比,其鲁棒性改进方面可以总结为以下几点:

(1) 第一阶段通过剔除外点去除退化的传感器数据来构建手眼标定方程组,在剔除外点算法的旋转外参解析解多解中,yaw、pitch 和 roll 三个角的误差外点的数量要远少于原始算法,提高了标定算法对包含退化传感器数据的鲁棒性。

(2) 通过滑动窗口多次求解解析解初值来筛选多解中满足相对阈值  $\sigma_3/\sigma_4 > 2.5$  的解,并以奇异值  $\sigma_3/\sigma_4$  作为各个解的权重加权求和,旋转外参 yaw、pitch 和 roll 的误差均值最小,最小为  $2.578^\circ$ 。

(3) 第二阶段非线性滑窗在线迭代优化时设置了固定外参的策略,在退化运动和错误历史约束过大时固定外参,避免了第一阶段获得优化初值漂移过大,陷入局部最小值。

(4) 将原始算法的三维点云重建结果与两阶段 LiDAR-IMU 外参在线标定算法的重建结果进行对比,本文所改进的算法对退化的传感器数据具有鲁棒性,提高了标定成功率和精度。

#### 参考文献:

- [1] SHAN T, ENGLT B. LeGO-LOAM: Lightweight and Ground-optimized Lidar Odometry and Mapping on Variable Terrain[C]// 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Madrid, 2018:4758-4765.
- [2] YE H, CHEN Y, LIU M. Tightly Coupled 3D Lidar Inertial Odometry and Mapping[C]// 2019 In-

- ternational Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, 2019:3144-3150.
- [3] MENG J, WAN L, WANG S, et al. Efficient and Reliable LiDAR-based Global Localization of Mobile Robots Using Multiscale/Resolution Maps [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70:1-15.
- [4] CHEN C, XIONG G, ZHANG Z, et al. 3D LiDAR-GPS/IMU Calibration Based on Hand-eye Calibration Model for Unmanned Vehicle[C]//2020 3rd International Conference on Unmanned Systems (ICUS). Harbin, 2020:337-341.
- [5] 张旭,贾君慧,张刚. 基于镜面反射的手眼标定方法[J]. 中国机械工程, 2018, 29(10):1153-1158. ZHANG Xu, JIA Junhui, ZHANG Gang. Hand-eye Calibration Method Based on Specular Reflection [J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(10): 1153-1158.
- [6] TSAI R Y, LENZ R K. A New Technique for Fully Autonomous and Efficient 3D Robotics Hand/Eye Calibration[J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 1989, 5(3):345-358.
- [7] STROBL K H, HIRZINGER G. Optimal Hand-eye Calibration[C]//2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, 2006:4647-4653.
- [8] HORAUD R, DORNAIKA F. Hand-eye Calibration[J]. The International Journal of Robotics Research, 1995, 14(3):195-210.
- [9] GENTIL C, VIDAL-CALLEJA T, HUANG S. 3D Lidar-IMU Calibration Based on Upsampled Preintegrated Measurements for Motion Distortion Correction[C]//2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Brisbane, QLD, Australia, 2018:2149-2155.
- [10] 吴昱晗,王蕴宝,薛庆全,等. 一种基于点云匹配的激光雷达/IMU联合标定方法[J]. 电子技术应用, 2019, 45(12):78-82. WU Yuhan, WANG Yunbao, XUE Qingquan, et al. A LiDAR/IMU Joint Calibration Method Based on Point Cloud Matching[J]. Application of Electronic Technique, 2019, 45(12):78-82.
- [11] 杨超,李天剑,胡欢,等. 基于非线性优化的激光雷达在线标定算法[J]. 计算机工程与设计, 2021, 42(7):1919-1925. YANG Chao, LI Tianjian, HU Huan, et al. Lidar Online Calibration Algorithm Based on Nonlinear Optimization[J]. Computer Engineering and Design, 2021, 42(7):1919-1925.
- [12] 彭梦,陈白帆,邓作杰,等. 2D激光雷达和摄像机最小解标定的多解筛选及参数优化[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(7):89-97. PENG Meng, CHEN Baifan, DENG Zuojie, et al. Multi-solution Screening and Parameter Optimization of 2D Lidar and Camera Minimum Solution Calibration[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(7):89-97.
- [13] JIAO J, YU Y, LIAO Q, et al. Automatic Calibration of Multiple 3D LiDARs in Urban Environments[C]//2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Macau, China, 2019:15-20.
- [14] QIN T, LI P, SHEN S. VINS-Mono: a Robust and Versatile Monocular Visual-inertial State Estimator[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2018, 34(4):1004-1020.
- [15] YANG Y, GENEVA P, ECKENHOFF K, et al. Degenerate Motion Analysis for Aided INS with Online Spatial and Temporal Sensor Calibration [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(2):2070-2077.

(编辑 王艳丽)

作者简介:林 鑫,男,1996年生,硕士研究生。研究方向为视觉SLAM,AGV 移动机器人。E-mail:linxin@hust.edu.cn。张 捷(通信作者),男,1973年生,讲师。研究方向为无人驾驶,AGV 移动机器人。E-mail:Jiezhang@hust.edu.cn。

(上接第 2979 页)

- [13] 程博. 马氏体时效钢(18Ni300)增减材复合制造工艺研究[D]. 大连:大连理工大学, 2018. CHENG Bo. Research on the Composite Manufacturing Process of Maraging Steel (18Ni300) with Increasing and Decreasing Materials [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.

(编辑 王艳丽)

作者简介:韩光超,男,1974年生,教授、博士研究生导师。研究方向为超声辅助微塑性成形及超声辅助切削加工工艺。发表论文 30 余篇。E-mail:hgc009@cug.edu.cn。